

# **Transformada de Fourier fraccional y la función de distribución de Wigner**



Pedro Enrique Piñeros Lourenco

Directora:

Alejandra Catalina Valencia González, Ph.D.

Departamento de Física  
Bogotá, Colombia

4 de diciembre de 2022



# Índice general

<b>1. Transformada de Fourier fraccional</b>	<b>5</b>
1.1. Transformación integral . . . . .	5
1.1.1. Transformada de Fourier . . . . .	6
1.1.2. Núcleo y propiedades de la FFT . . . . .	8
1.2. Ejemplo de la FFT . . . . .	12
1.2.1. FFT de dos gaussianas separadas una distancia $2d$ . . . . .	12
1.3. Implementación óptica de la transformada de Fourier espacial . . . . .	15
<b>2. Función de distribución de Wigner</b>	<b>23</b>
2.1. WDF en análisis de señales . . . . .	23
2.2. WDF en Mecánica Cuántica . . . . .	23
2.3. Ejemplos de WDF . . . . .	24
2.3.1. WDF de un estado de gato . . . . .	24
2.3.2. WDF de dos gaussianas separadas una distancia $2d$ . . . . .	25
<b>3. Relación entre la WDF y la FFT</b>	<b>29</b>
3.1. La transformada de Radon . . . . .	29
3.2. La WDF y la transformada de Radon . . . . .	30
<b>4. Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>33</b>



# Índice de figuras

1.1.	Recta a cierto ángulo $\alpha$ con respecto al eje $t$ , en el plano $t - \omega$ . . . . .	10
1.2.	Modulo cuadrado de la FFT espacial, a orden $\frac{1}{2}$ , de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. . . . .	14
1.3.	Modulo cuadrado de la FFT espacial, a orden 1, de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. . . . .	14
1.4.	Modulo cuadrado de la FFT espacial, a orden $\frac{6}{7}$ , de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. . . . .	15
1.5.	Modulo cuadrado de la FFT espacial, a orden $\frac{4}{3}$ , de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. . . . .	15
1.6.	Perturbación óptica pasando por una función de apertura. . . . .	16
1.7.	Evolución espacial de una onda plana en el espacio de Fourier. . . . .	17
1.8.	Apertura con un lente plano convexo. . . . .	19
1.9.	Sistema $2f$ . . . . .	20
2.1.	Función de Wigner espacial de un estado de gato impar. . . . .	25
2.2.	Función de Wigner espacial de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. . . . .	27
3.1.	Recta donde se proyecta una función de dos variables en el plano $x - y$ . . . . .	30



# Resumen

La función de distribución de Wigner es una herramienta muy útil en análisis de señales, debido a que provee una representación de una señal en las variables conjugadas a través del espacio de fase. En el contexto de la mecánica cuántica, esta función representa una distribución de cuasiprobabilidad en el espacio de fase para un estado cuántico.

Por otro lado, en procesamiento de señales, la transformada de Fourier y su generalización, la transformada de Fourier fraccional (FFT, por sus siglas en inglés), juegan un rol importante en el análisis en tiempo y frecuencia. Mas aún, investigaciones realizadas a finales de los años noventa encontraron que se podría obtener la reconstrucción de la función de Wigner a partir de la recolección de diferentes transformadas de Fourier fraccionales.

En este proyecto se describe, de forma teórica la obtención de la función de Wigner a partir de la transformada de Fourier fraccional (FFT, por sus siglas en inglés). Además, se encuentra teóricamente, a partir de las las funciones de transferencia o de apertura, una implementación óptica de la transformada de Fourier espacial de una fuente de luz clásica, todo esto desde el área de la óptica de Fourier o también conocida como óptica difractiva. Esto con el propósito de implementarlo en un proyecto experimental para encontrar una señal óptica clásica, tal que se pueda reconstruir la función de Wigner de un estado cuántico conocido, a través de la obtención de sus transformadas de Fourier fraccionales en la variable de frecuencia espacial. Para lograr estos objetivos se recopila información sobre el origen de la función de Wigner y de la FFT, a partir de artículos que los relacionen, para poder tener una descripción completa de cómo lleva la una a la otra.

En este proyecto se concluye que la WDF de un estado de gato es casi la misma que la de dos gaussianas separadas una distancia  $2d$ , salvo por unas constantes. También, se demuestra que efectivamente un sistema  $2f$ , permite generar la transformada de Fourier espacial de una señal óptica. Además, se encuentra la transformada Radon, dado un ángulo  $\theta$ , de la función de Wigner de una señal, es el modulo cuadrado de la FFT, a orden  $a$ , de la misma señal, donde  $\theta = \frac{a\pi}{2}$ .

## Abstract

The Wigner distribution function is a very useful tool in signal analysis, because it provides a representation of a signal in conjugate variables through the phase space. In the context of quantum mechanics this function represents a quasi-probability distribu-

tion in phase space for a quantum state.

On the other hand, in signal processing, the Fourier transform and its generalization play an important role in time and frequency analysis. Furthermore, research carried out in the late nineties found that the reconstruction of the Wigner function could be obtained from the collection of different fractional Fourier transforms.

In this project, it is proposed theoretically describe how the Wigner function comes from the fractional Fourier transform (FFT). In addition, it is suitable to find, from the aperture or the transfer functions, an optical implementation of the spatial FFT of a classical light source, all described from the area of Fourier optics or also known as diffractive optics. This is with the purpose of implementing it in an experimental project and finding a classical optical signal so the Wigner function of a known quantum state can be reconstructed through its FFT in space. In order to achieve these objectives, information is collected about the origin of the Wigner function and the FFT. Articles, that relate these functions, are found in order to have a complete mathematical description of how one leads to the other.

In this project it is concluded that the WDF of a cat state is almost the same of two Gaussians separated by a distance  $2d$ , except for some constants. Also, it is shown that a  $2f$  system effectively allows generating the spatial Fourier transform of an optical signal. In addition, the Radon transform is found, given an angle  $\theta$ , of the Wigner function of a signal, it is the square module of the FFT, order  $a$ , of the same signal, where  $\theta = \frac{a\pi}{2}$ .

## Introducción

En las últimas décadas ha sido posible la generación de fuentes de luz con propiedades que se explican utilizando el formalismo de la mecánica cuántica. Por ejemplo, los llamados estados de Fock, estados de vacío, estados squeezed o estados de gato [1]. Estos tipos de luz pueden ser utilizados para aumentar el entendimiento de cómo se comporta a nivel de pocos fotones o de un fotón, es decir, al utilizarlos se podrá entender a mayor profundidad el comportamiento cuántico de los fotones y con ello generar diversas aplicaciones en función de estas características cuánticas. Por ejemplo, las propiedades cuánticas de los estados squeezed permiten que interferómetros como el LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) tengan la sensibilidad necesaria para poder detectar ondas gravitacionales [2]. También, las propiedades de los estados de gato han permitido codificar qubits de información, para que puedan ser utilizados en computación cuántica [3]. Sin embargo, la generación de estas fuentes puede ser altamente compleja y costosa. Debido a este problema se hace interesante buscar si sistemas clásicos más simples pueden simular características de estados cuánticos. La función de Wigner y la transformada de Fourier fraccional, son dos herramientas matemáticas que ayudarán a encontrar una respuesta a esta pregunta.

En 1932 Eugene Wigner introdujo, por primera vez, la función de Wigner [4] en el contexto de la mecánica cuántica. Esta función, a nivel general, es una herramienta que permite la representación de una señal en tiempo y frecuencia [5]. En el ámbi-



to de la mecánica cuántica, la función de Wigner representa la distribución de cuasi-probabilidad de un estado en el espacio de fase [6], la cual permite dar una descripción estadística completa de un sistema físico. Se le denomina distribución de cuasi-probabilidad porque permite obtener valores negativos que describen si un estado es no clásico. También, se pueden calcular valores esperados de cantidades observables a partir de esta función.

En el ámbito de la óptica cuántica, esta función ha sido de vital importancia a la hora de describir propiedades de los estados cuánticos de la luz [1, 7]. Hoy en día, la reconstrucción de la función de Wigner de un estado cuántico se puede hacer por medio de un proceso conocido como tomografía en variables continuas a través de un sistema de detección homodina balanceada [8]. Este proceso se basa en la medición de la distribución de cuadraturas de una fuente de luz a partir de la resta de intensidades de dos campos eléctricos que son detectados después de pasar por un divisor de haz. Uno de estos campos eléctricos es conocido como el oscilador local y el otro como la fuente de luz, para la cual queremos hallar su función de Wigner. Después de obtener diversas medidas de la distribución de estas cuadraturas a partir de diferentes valores de la fase del oscilador local, se utiliza un método computacional llamado retroproyección filtrada, basado en la transformada Radon. Este método permite obtener la transformada inversa de Radon y con ello la función de Wigner [8].

Por otro lado, la transformada de Fourier fraccional (FFT, por sus siglas en ingles), fue definida e introducida por Edward Condon [9], en 1937, al estudiar la función de Green del espacio de fase de las rotaciones, y también por Victor Namias en 1980 en el contexto de la mecánica cuántica [10]. La FFT es una generalización de la transformada de Fourier ordinaria con un parámetro de orden  $a$ . El  $a$ -ésimo orden es equivalente a aplicar  $a$  veces el operador de la transformada de Fourier a una función. Mas aún, este parámetro  $a$  puede generalizarse a valores reales. Esta transformación actúa como un operador lineal. Por ende, tiene funciones propias y valores propios asociados. Mediante la construcción de la transformada de Fourier con estas funciones y valores propios, se puede obtener el núcleo de la transformación integral [11].

En recientes investigaciones se ha encontrado, que bajo cierta manipulación matemática de la FFT, a diferentes órdenes [11], se puede obtener la función de Wigner de una señal [12]. En esta propuesta se plantea recopilar información sobre la FFT y la función de distribución de Wigner que permita completar el desarrollo teórico en el cual se relacionen ambas expresiones. Además, si se describe la implementación óptica que se debe seguir para obtener la FFT de una señal óptica, entonces será posible generar un experimento en otro proyecto que pueda aplicar dicha implementación. Por ende, la justificación principal al realizar este proyecto es que va a ser un primer paso para describir una parte teórica de un proyecto experimental que se pretende realizar en la monografía. Este experimento podrá hacer que, por medio de una señal óptica clásica, se pueda reconstruir la función de Wigner de un estado de gato, lo cual permitirá abrir una línea de investigación para encontrar análogos clásicos de fenómenos cuánticos con implicaciones en la simulación de sistemas cuánticos en óptica. Esto será útil ya que permitirá generar otros métodos de menor costo para obtener la función de Wigner de estados cuánticos.



# Capítulo 1

## Transformada de Fourier fraccional

Las transformaciones integrales como la transformada de Fourier y de Laplace han jugado un rol muy importante en aplicaciones en física teórica, ingeniería eléctrica y matemática aplicada. Además, de las transformaciones de Laplace y de Fourier, los físicos poseen un arsenal de otras transformadas integrales, donde cada una presenta un alcance en aplicaciones prácticas [10].

Los matemáticos y físicos alrededor de la década de los ochenta, tuvieron en encontrar un método para reintroducir una nueva transformada integral que dependiera de un parámetro continuo  $\alpha$ , y que, a partir de esta transformada se pudiera llegar también a la transformada de Fourier ordinaria, siendo esta un caso particular de esta nueva transformada integral a la cual llamarán transformada de Fourier fraccional [10].

Su aplicación proporciona una técnica conveniente para resolver ciertas clases de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales que surgen en la mecánica cuántica en los hamiltonianos cuadráticos, como lo es el oscilador armónico. Esta transformada puede tener una versión en tres dimensiones. Como aplicación del método a más de una dimensión, se puede estudiar la dinámica de los electrones en un campo magnético constante y uniforme en mecánica cuántica [10].

Antes de entrar en detalle sobre cómo se define la FFT, vale la pena definir qué es una transformada integral, y con ello discutir algunas de las propiedades de la transformada de Fourier.

### 1.1 Transformación integral

Una transformación integral mapea una función de su dominio original a un dominio diferente. En términos generales, cualquier transformada integral de la función  $f(t)$ , que se denota de manera general como  $g(x)$ , se puede escribir de la siguiente forma [13]:

$$g(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt. \quad (1.1)$$

En el caso anterior, los límites  $[a, b]$  representan el dominio sobre el cual la función  $f(t)$  está definida, mientras que  $K(x, t)$  se conoce como el núcleo de la transformación, el cual permite hacer el cambio de la variable  $t$  a la variable  $x$ .

En otras palabras, una transformada integral es un cambio de base para la función  $f(t)$ . Nótese la similitud con el cambio de base definido para vectores en  $\mathbb{R}^n$ : si  $v_i$  y  $v_i'$

son las componentes de un vector en  $\mathbb{R}^n$ , en una base inicial y final respectivamente, y  $M_{ij}$  son las componentes de la matriz que genera el cambio de base, entonces, se encuentra que:

$$v_i' = \sum_{j=1}^n M_{ij} v_j. \quad (1.2)$$

En términos de funciones, una función  $f(t)$  que toma valores reales en la variable  $t$  se transforma a otra función  $g(x)$  que toma valores reales en una nueva variable  $x$  mediante el núcleo  $K(x,t)$ . Ambas funciones,  $f(t)$  y  $g(x)$ , contienen la misma información, pero cada representación permite estudiar la función de una manera distinta [14]. Simbólicamente se escribe la expresión (1.1) como:

$$g(x) = \mathcal{L}f(t), \quad (1.3)$$

donde se observa que la transformación integral se puede interpretar como la acción de un operador  $\mathcal{L}$  bajo una función. Este operador se asocia a una transformación de tipo lineal, debido a las propiedades lineales de la integral. Esta transformación es particular debido a que no solo transforma la función sino también el dominio de esta.

Para que estas transformaciones sean útiles debe haber una transformación inversa. Por lo tanto, si existe una inversa, se puede encontrar la función  $f(t)$  a partir de  $g(x)$ , evaluando:

$$\mathcal{L}^{-1}g(x) = f(t), \quad (1.4)$$

donde  $\mathcal{L}^{-1}$  es la operación inversa del operador que actúa en la ecuación (1.3). De esta forma, es importante escoger el núcleo adecuado que permita que haya una transformación integral inversa.

El uso más común que se le da a estas transformaciones es al resolver ecuaciones diferenciales, ya sean, de órdenes superiores. Esto, debido a que al transformar estas ecuaciones, las derivadas e integrales se pueden reducir a polinomios o expresiones más sencillas para manejar matemáticamente. Para esto, es necesario tener una inversa porque al encontrar la función deseada en el espacio recíproco, se debe aplicar después la inversa para encontrar la función en el espacio directo, que es lo que se quería originalmente para resolver la ecuación diferencial [13].

Un ejemplo de una de las transformaciones integrales más usadas es la transformada de Fourier. Después, se mencionará el caso de la transformada de Fourier fraccional.

### 1.1.1 Transformada de Fourier

Se sabe que una serie de Fourier posee unos coeficientes, denominados en la literatura coeficientes  $c_n$ , que sirven para representar una función periódica como una serie de Fourier. Básicamente, los coeficientes de una serie de Fourier y la función misma contienen idéntica información.

A pesar de la utilidad que presentan las series de Fourier, estas poseen cierta limitación, pues solo se pueden aplicar a funciones periódicas. No obstante, se puede encontrar el análogo de una serie de Fourier a una función no periódica; a esto se le denomina una transformada de Fourier. Específicamente, la transformada de Fourier de una función  $f(t)$  se define como:

$$F\{f(t)\} = g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt, \quad (1.5)$$

donde  $\omega$  y  $t$  son variables conjugadas,  $F\{\}$  es el operador transformada de Fourier y  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}$  es el núcleo de la transformación. La notación de la transformada de Fourier no es enteramente universal, algunos omiten el prefactor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  o toman el núcleo con un signo menos en el exponente. Los cambios en la notación no cambian las matemáticas. En procesamiento de señales,  $f(t)$ , generalmente, representa el comportamiento temporal de una señal, y, por ende, su transformada de Fourier dará razón de su comportamiento en frecuencia.

Uno de los conceptos más importantes en análisis de Fourier es el del dominio de Fourier. Este dominio es entendido como el espacio en donde la representación de la transformada de Fourier vive. Esto puede representarse a través de lo que se conoce como un espacio de fase. El espacio de fase, tiene en su eje horizontal (que en física estaría ligado a espacio o tiempo) el dominio de la función original, mientras en el eje vertical esta el dominio de la transformada de Fourier de la función, es decir, el dominio de la frecuencia espacial o temporal. Con esto, se puede observar que el eje que hace un ángulo de noventa grados sobre el eje horizontal, constituye el dominio de la transformada de Fourier.

Por otro lado, se puede encontrar que la transformada de Fourier cumple una ecuación de valores propios. Para poder llegar a esta ecuación, se recurre a la función generatriz de los polinomios de Hermite ( $H_n(x)$ ), que está definida como [10]:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (1.6)$$

Si se multiplica la ecuación (1.6) por  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ , se obtiene:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2+2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (1.7)$$

Al aplicar la transformada de Fourier al lado izquierdo de la ecuación:

$$F \left\{ e^{-\frac{1}{2}x^2+2xt-t^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-\frac{1}{2}x^2+2xt-t^2} dx \quad (1.8)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}k^2-2kit+t^2}, \quad (1.9)$$

utilizando la ecuación (1.6), se llega a:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}k^2} H_n(k) \frac{(-it)^n}{n!}. \quad (1.10)$$

Por otro lado, la transformada de Fourier del lado derecho es:

$$F \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} F \left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \right\} \frac{t^n}{n!}, \quad (1.11)$$

Al igualar lo que esta adentro de la sumatoria de la ecuación (1.10) con lo de la ecuación (1.11), se obtiene la relación:

$$F \left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \right\} = (-i)^n e^{-\frac{k^2}{2}} H_n(k), \quad (1.12)$$

que se puede reescribir como:

$$F \left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \right\} = e^{-i\frac{n\pi}{2}} e^{-\frac{k^2}{2}} H_n(k). \quad (1.13)$$

De esta forma, se observa que la ecuación (1.13) es una ecuación de valores propios en el espacio de funciones cuadrado integrables  $L^2(\mathbb{R})$  [10]. Por lo tanto, las funciones  $\psi_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ , forman una base ortogonal en este espacio vectorial, la cual diagonaliza el operador de la transformada de Fourier, y los valores propios asociados a estas funciones son  $e^{-i\frac{n\pi}{2}}$ .

## 1.1.2 Núcleo y propiedades de la FFT

La idea de la FFT es en componer la transformada de Fourier con ella misma un cierto número de veces. De este modo, se puede definir la FFT sobre una función  $f(t)$  de la siguiente manera [15]:

$$F^a \{f(t)\} := \underbrace{(F \circ F \circ \dots \circ F)}_a \{f(t)\} = g_a(u), \quad (1.14)$$

donde  $a$  es el orden de la transformación y  $u$  el nuevo dominio de la función transformada. Además, el parámetro  $a$  no se limita a valores enteros sino también puede tomar valores reales. A partir de esto, se puede notar que la FFT a orden cero corresponde al operador identidad y la FFT a orden uno corresponde la transformada de Fourier.

La acción de una transformación lineal  $a$  veces a su función propia, es equivalente a elevar el valor propio a la potencia  $a$  y multiplicarlo por la función propia. Lo mismo puede hacerse con la transformada de Fourier, por lo que es una transformación lineal. Por ende, se puede aplicar  $a$  veces la transformada de Fourier a la ecuación de valores propios encontrada en (1.13). Por lo tanto la FFT tendrá las mismas funciones propias que la transformada de Fourier (FT, por sus siglas en ingles) pero con los valores propios elevados a la potencia  $a$  [15]:

$$F^a \{\psi_n\} = (e^{-i\frac{n\pi}{2}})^a \psi_n, \quad (1.15)$$

dando lugar a la ecuación de valores propios para la FFT.

De esta manera, para calcular la FFT de una función cuadrado integrable, se debe expresarla en términos de las funciones propias de esta transformación:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(t). \quad (1.16)$$

Al multiplicar por  $\psi_{n'}$  e integrar en  $u$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n'}(t) f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n'}(t) \psi_n(t) dt, \quad (1.17)$$

debido a la propiedad de ortogonalidad de las funciones  $\psi_n$ , se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n'}(t)f(t)du = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \delta(n' - n), \quad (1.18)$$

por lo tanto, los coeficientes  $C_n$  son:

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t)f(t)dt, \quad (1.19)$$

aplicando a ambos lados la FFT a orden  $a$ :

$$F^a \{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n F^a \{\psi_n(t)\}, \quad (1.20)$$

$$g_a(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-i\frac{an\pi}{2}} \psi_n(u), \quad (1.21)$$

$$g_a(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t)f(t)dt \right) e^{-i\frac{an\pi}{2}} \psi_n(u), \quad (1.22)$$

$$g_a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\frac{an\pi}{2}} \psi_n(t)\psi_n(u) \right] f(t)dt. \quad (1.23)$$

Por comparación, se observa que el término que está en corchetes es el núcleo de la transformación, rectificando que la FFT sea una transformación integral de la forma:

$$g_a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u,t)f(t)dt. \quad (1.24)$$

Se puede desarrollar el término dentro del corchete de la ecuación (1.23) para encontrar el núcleo de la transformación de forma explícita. Sin embargo, este desarrollo puede ser un poco extenso y complejo. Por eso, es preferible atacar el problema de encontrar el núcleo de la transformación a través de su interpretación geométrica.

Puesto que la transformada de Fourier representa una rotación del dominio de la función en un ángulo de noventa grados en el espacio de fase, hacer una FFT representa una rotación del dominio de la función en un ángulo arbitrario. Si la FFT de orden uno es la rotación de noventa grados del dominio en el espacio de fase, entonces se puede relacionar el ángulo de rotación con el orden de la transformada, de la siguiente forma,  $\alpha = \frac{a\pi}{2}$ . De esta forma, gráficamente la FFT a orden dos es un operador de paridad porque transforma el dominio, al mismo pero con signo menos. La FFT de orden cero es el operador de identidad, la FFT de un orden  $a'$  compuesta por una FFT de orden  $a$  es la FFT de orden  $(a' + a)$ . , la FFT de un orden  $a$  más un múltiplo de cuatro será la misma FFT de orden  $a$  porque llega al mismo cuadrante en el espacio de fase. Por ende, se pueden restringir los valores de  $a$  al intervalo  $(-2, 2]$  o  $[0, 4)$  [11].

A partir de esto, se busca un núcleo de la forma  $Ae^{if(t)}$ , en analogía al núcleo de la transformada de Fourier. En este caso, la derivada de  $f(t)$  jugaría el rol de la "frecuencia". Además, esta derivada debe ser un eje tal que, sea perpendicular a una recta que

forme un ángulo  $\alpha$  en el espacio de fase. Por lo tanto, si se traza una recta con distancia  $u$  desde el origen a la intersección con la recta perpendicular a esta en el espacio de fase en las variables  $\omega$  y  $t$ , se obtiene el gráfico de la figura (1.1):

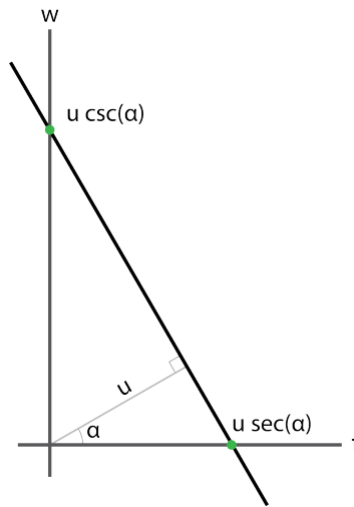


Figura 1.1: Se muestran dos rectas perpendiculares en el espacio de fase de  $\omega$  y  $t$ . Una de estas rectas forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $t$ , que tiene distancia  $u$  desde el origen hasta la intersección con la recta  $f'(t)$ , perpendicular a esta. Tomado de [15].

En la figura (1.1), la pendiente de la recta  $f'(t)$  es  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2})$ , que por identidades trigonométricas se puede escribir como  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\cot(\alpha)$ . Se observan dos triángulos rectángulos en la gráfica, el cual comparten un mismo cateto de longitud  $u$ . La hipotenusa del triángulo más grande es el intercepto en  $\omega$  de la recta  $f'(t)$ . Debido a que el ángulo entre la recta  $w$  y  $f'(t)$  es  $\alpha$  también. Entonces el cateto adyacente del triángulo más grande es de longitud  $x \cos(\alpha)$ , donde  $x$  es el valor de la hipotenusa. Por ende, para hallar la hipotenusa se utiliza el teorema de pitágoras:

$$(x \cos(\alpha))^2 + u^2 = x^2,$$

al despejar  $x$ , se obtiene  $x = u \csc(\alpha)$ . La ecuación de la recta queda como:

$$f'(t) = -\cot(\alpha)t + u \csc(\alpha). \quad (1.25)$$

Para encontrar el intercepto en  $t$ , se hace  $f'(t) = 0$  y se despeja  $t$  en la ecuación de la recta. De esta manera, se obtiene que el intercepto en  $t$  es  $u \sec(\alpha)$ . Ahora, para hallar  $f(t)$  se integra la ecuación (1.25), y para hallar la constante de integración, se utiliza la condición  $f'(0) = u \csc(\alpha)$ . Por ende, se encuentra al integrar:

$$f(t) = u \csc(\alpha)t - \cot(\alpha) \frac{t^2}{2}.$$

Por lo tanto, se tiene que el núcleo de la transformación toma la forma:

$$K(u, t) = A(u, \alpha) e^{i \left( u \csc(\alpha)t - \cot(\alpha) \frac{t^2}{2} \right)},$$

donde  $A(u, \alpha)$  es una constante de normalización. Se sabe que  $K(u, t)$  debe ser simétrica en  $u$  y en  $t$ . Para hacerlo así, sin alterar las condiciones que debe cumplir  $f(t)$ , se debe



tener en cuenta un factor de  $e^{i \cot(\alpha) \frac{u^2}{2}}$ , que toma en cuenta la parte en  $u$  del factor de normalización. Por lo que, el núcleo queda como:

$$K(u, t) = A(\alpha) e^{i \left( u \csc(\alpha) t - \cot(\alpha) \frac{t^2 + u^2}{2} \right)}.$$

Ahora, se va a calcular  $A(\alpha)$ , al efectuar el producto interno e igualarlo a uno:

$$|A|^2 (F^a \{f(t)\} | F^a \{f(t)\}) = 1, \quad (1.26)$$

Aplicando esto, se obtiene:

$$\begin{aligned} |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i \left( u \csc(\alpha) t - \cot(\alpha) \frac{t^2 + u^2}{2} \right)} dt \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\tau) e^{-i \left( u \csc(\alpha) \tau - \cot(\alpha) \frac{\tau^2 + u^2}{2} \right)} d\tau \right] du &= 1, \\ = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \left( u \csc(\alpha) t - \cot(\alpha) \frac{t^2 + u^2}{2} \right)} e^{-i \left( u \csc(\alpha) \tau - \cot(\alpha) \frac{\tau^2 + u^2}{2} \right)} dud\tau dt, \\ = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \left( u \csc(\alpha) (t - \tau) - \cot(\alpha) \frac{t^2 - \tau^2}{2} \right)} dud\tau dt, \\ = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\tau) e^{-\cot(\alpha) \frac{t^2 - \tau^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i u \csc(\alpha) (t - \tau)} dud\tau dt, \end{aligned}$$

si se usa el hecho de que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i \omega t} d\omega = 2\pi \delta(t)$ , entonces se realiza la sustitución  $\omega = u \csc(\alpha)$  y se obtiene:

$$\begin{aligned} = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\tau) e^{-\cot(\alpha) \frac{t^2 - \tau^2}{2}} 2\pi \sin(\alpha) \delta(t - \tau) d\tau dt, \quad (1.27) \\ = |A|^2 2\pi \sin(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{f}(t) dt, \end{aligned}$$

como el  $(f|f) = 1$ , entonces:

$$|A|^2 2\pi \sin(\alpha) = 1,$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin(\alpha)}}.$$

Ahora, solo queda encontrar la fase de  $A$ . Se sabe que a medida que  $\alpha \rightarrow 0$ , entonces el núcleo debe aproximarse a una función delta. Por lo que, a orden cero la FFT es la misma función  $f(t)$ . Para realizar este limite, se utilizará el hecho de que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi i \varepsilon}} e^{-\frac{i t^2}{2\varepsilon}}.$$

Además, a medida que  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\csc(\alpha) \rightarrow \cot(\alpha) \rightarrow \frac{1}{\alpha}$  y  $\sin(\alpha) \rightarrow \alpha$ . Así:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin(\alpha)}} e^{i \left( u \csc(\alpha) t - \cot(\alpha) \frac{t^2 + u^2}{2} \right)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi \alpha}} e^{\frac{i u t}{\alpha} - i \frac{t^2}{2\alpha} - i \frac{u^2}{2\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}} e^{\frac{i}{2\alpha}(2ut-t^2-u^2)} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}} e^{\frac{-i}{2\alpha}(u-t)^2} \\
&= \sqrt{i}\delta(u-t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se necesita dividir la constante por  $\sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}}$ . Esta fase solo se aplica cuando  $\alpha = 0$ . Sin embargo, la fase debe ser uno cuando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , debido a que a ese ángulo ya se obtiene el núcleo de la transformada de Fourier. Por lo tanto, se necesita una función de  $\alpha$  que haga que para  $\alpha = 0$  la fase sea  $e^{\frac{\pi}{4}}$ , y para  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  sea uno. Por ende la constante de normalización finalmente queda como:

$$A = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi \sin(\alpha)}}.$$

Finalmente, se incluye esta constante al núcleo y con ello se puede describir la FFT como una transformación integral de la forma [15]:

$$F^{\alpha}\{f(t)\} = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi \sin(\alpha)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(ucsc(\alpha)t - cot(\alpha)\frac{(t^2+u^2)}{2})} dt. \quad (1.28)$$

## 1.2 Ejemplo de la FFT

A continuación, se realizará un calculo, para conocer cuál es la FFT de dos gaussianas separadas una distancia  $2d$ . Para el calculo, se utilizará la definición de FFT de Victor Namias [10], la cual es casi la misma que la ecuación (1.28), pero cambian los signos de los exponenciales. El cambio de signo no afecta la transformación, es análogo a cuando a veces la transformada de Fourier se define con un mas o con un menos en el exponente.

### 1.2.1 FFT de dos gaussianas separadas una distancia $2d$

La función de una señal de dos gaussianas separadas una distancia  $2d$  es:

$$u(y) = N(e^{-a(y-d)^2} + e^{-a(y+d)^2}), \quad (1.29)$$

donde  $N$  es una constante de normalización y  $a = \frac{1}{2\sigma_y^2}$ .  $\sigma_y$  es la incertidumbre de la gaussiana. La FFT queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
F^{\alpha}\{u(y)\} &= N \frac{e^{-i(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi \sin(\alpha)}} e^{-icot(\alpha q_y^2/2)} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-a(y-d)^2} e^{-icot(\alpha)y^2/2} e^{iyq_y/\sin(\alpha)} \\
&\quad + e^{-a(y+d)^2} e^{-icot(\alpha)y^2/2} e^{iyq_y/\sin(\alpha)}) dy.
\end{aligned} \quad (1.30)$$

Se puede ver que la ecuación (1.2.1) consta de la suma de dos integrales.

Antes de comenzar a integrar, se va a recordar cómo es la integral de una gaussiana genérica:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2+by+c} dy &= e^c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y^2-by/a)} dy, \\ &= e^c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y^2-by/a+b^2/4a^2)+b^2/4a} dy, \\ &= e^{c+b^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-b/2a)^2} dy,\end{aligned}$$

Al hacer un cambio de variable del tipo  $u = x - b/2a$ , y por ende  $du = dx$ :

$$= e^{c+b^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du,$$

Al hacer otro cambio de variable del tipo  $v = \sqrt{a}u$ , y por ende  $du = \frac{dv}{\sqrt{a}}$ :

$$= e^{c+b^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \frac{dv}{\sqrt{a}}.$$

La integral del tipo  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$  es igual a  $\sqrt{\pi}$  [13]. Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2+by+c} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{c+b^2/4a}. \quad (1.31)$$

Para la primera integral de la FFT, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-d)^2} e^{-icot(\alpha)y^2/2} e^{iyq_y/\sin(\alpha)} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2+2ayd-ad^2-icot(\alpha)y^2/2+iq_y y/\sin(\alpha)} dy, \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a+icot(\alpha)/2}} e^{-ad^2} e^{(2ad+iq_y/\sin(\alpha))^2/4(a+icot(\alpha)/2)}, \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a+icot(\alpha)/2}} e^{-ad^2} e^{a^2d^2/(a+icot(\alpha)/2)} e^{adiq_y/\sin(\alpha)(a+icot(\alpha)/2)} e^{-q_y^2/4\sin^2(\alpha)(a+icot(\alpha)/2)}.\end{aligned}$$

La segunda integral queda como:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y+d)^2} e^{-icot(\alpha)y^2/2} e^{iyq_y/\sin(\alpha)} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2-2ayd-ad^2-icot(\alpha)y^2/2+iq_y y/\sin(\alpha)} dy, \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a+icot(\alpha)/2}} e^{-ad^2} e^{(-2ad+iq_y/\sin(\alpha))^2/4(a+icot(\alpha)/2)}, \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a+icot(\alpha)/2}} e^{-ad^2} e^{a^2d^2/(a+icot(\alpha)/2)} e^{-adiq_y/\sin(\alpha)(a+icot(\alpha)/2)} e^{-q_y^2/4\sin^2(\alpha)(a+icot(\alpha)/2)}.\end{aligned}$$

Al sumar estas integrales y recordando la identidad de Euler  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , se obtiene la FFT de dos gaussianas separadas una distancia  $2d$ :

$$F^a \{u(y)\} = N \frac{e^{-i(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi \sin(\alpha)}} e^{-icot(\alpha q_y^2/2)} \sqrt{\frac{\pi}{a+icot(\alpha)/2}}$$

$$e^{-ad^2 - q_y^2/4 \sin^2(\alpha)(a + i \cot(\alpha)/2) + a^2 d^2 / (a + i \cot(\alpha)/2)} 2 \cos\left(\frac{adq_y}{\sin(\alpha)(a + i \cot(\alpha)/2)}\right).$$

A continuación, se van a mostrar gráficas de  $|F^\alpha\{u(y)\}|^2$ , para  $N = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ ,  $\sigma_y = 0,3525\text{mm}$ ,  $d = 3,5\text{mm}$ , para distintos valores de  $\alpha$ .

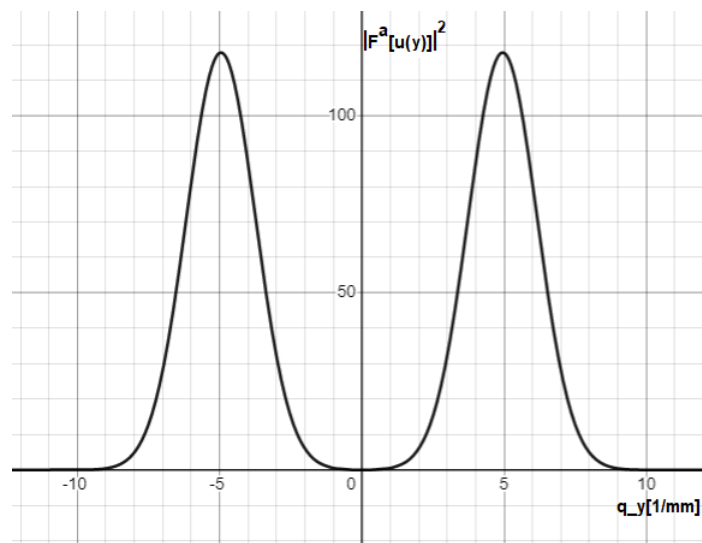


Figura 1.2: Modulo cuadrado de la FFT espacial, a orden un medio, de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. Cada gaussiana tiene una incertidumbre de 0,3525mm.

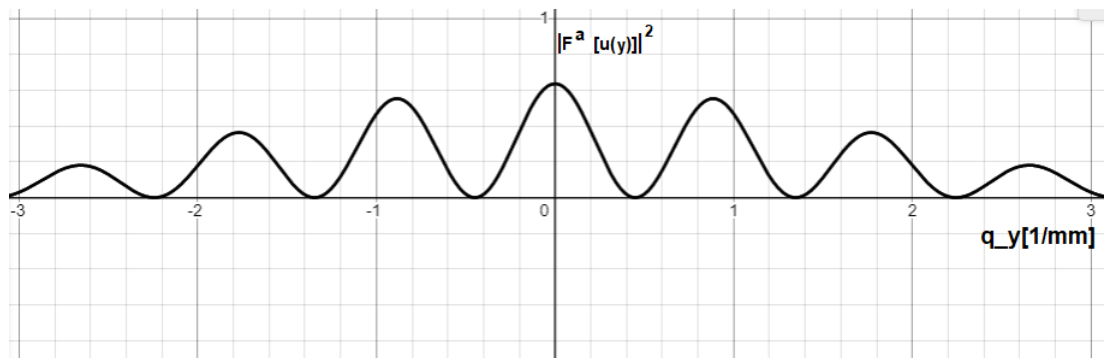


Figura 1.3: Modulo cuadrado de la FFT espacial, a orden uno, de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. Cada gaussiana tiene una incertidumbre de 0,3525mm.

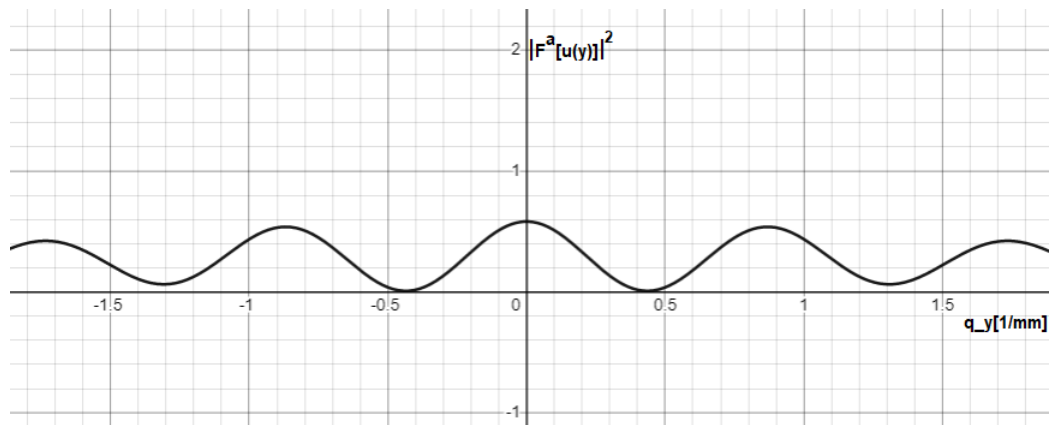


Figura 1.4: Módulo cuadrado de la FFT espacial, a orden  $\frac{6}{7}$ , de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. Cada gaussiana tiene una incertidumbre de 0,3525mm.

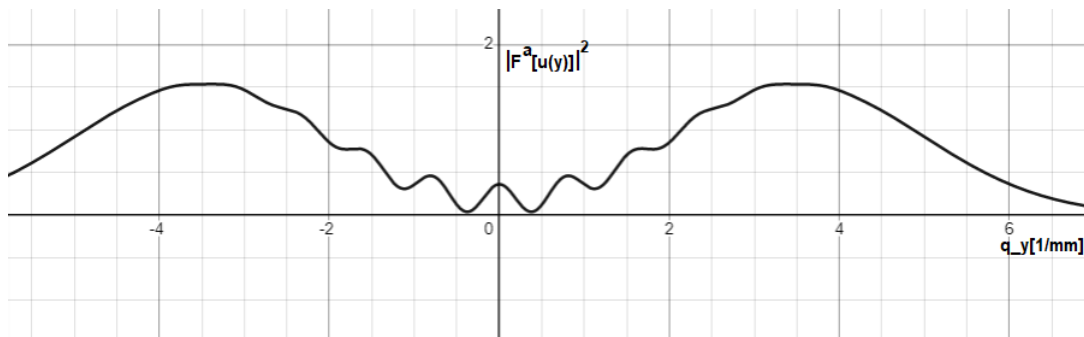


Figura 1.5: Módulo cuadrado de la FFT espacial, a orden  $\frac{4}{3}$ , de dos gaussianas separadas una distancia de 7mm. Cada gaussiana tiene una incertidumbre de 0,3525mm.

### 1.3 Implementación óptica de la transformada de Fourier espacial

Para poder describir que tipo de sistema óptico genera la transformada de Fourier espacial, primero toca recordar algunos conceptos sobre la difracción, y definir qué es una función de apertura y una función de transferencia en este mismo contexto.

Una apertura se puede pensar como un objeto que bloquea toda la luz en cierta región y después la deja pasar. La función de apertura en este caso representa como cambia la intensidad de la luz en el espacio, justo después de pasar por la apertura. Por ejemplo, en una dimensión, si se tiene una apertura que deja pasar la luz solo en  $x = 0$  y  $x = a$ , siendo  $a$  un número positivo, la función de apertura asociada  $g(x)$  es una función que es cero desde menos infinito a cero y de  $a$  a infinito, y uno para valores entre cero y  $a$ . En este caso, el hecho de que la función  $g(x)$  valga uno significa que la luz está pasando toda su intensidad en esa región. Si por ejemplo se pusiera un filtro que bajara la intensidad a la mitad entonces la función es  $\frac{1}{2}$  entre cero y  $a$ , y cero en el resto. Este ejemplo representa una rendija. También, podrían haber varias rendijas, que dejan pasar la luz en su totalidad o parcialmente, teniendo una función  $g(x)$  general para la apertura unidimensional. También, las funciones de apertura pueden generar cierta fase a la señal óptica. Por ejemplo, agregarle un material con índice de refracción diferente

al del medio y en el que se pueda transmitir la luz, hace que se genere cierta fase. Además, esta fase puede variar espacialmente si se piensa de forma más general, es decir que la fase sea del tipo  $e^{if(x)}$ , donde  $f(x)$  es una función de la posición. Con esto, surge la pregunta de si cualquier objeto que obstaculice la luz puede generar una función de apertura, entonces, cuál sería la función de apertura de un lente, y efectivamente más adelante se explica cuál es, y se llega a que precisamente este afecta la fase de la onda. Por lo cual esto deja a entender que los lentes se usan en realidad cómo elementos difractivos.

Hasta aquí, se ha mencionado sobre la difracción en términos de cómo la luz se comporta al pasar sobre una rendija. Pero la difracción es mucho más general que eso. En realidad la difracción trata sobre cómo la luz evoluciona espacialmente o como se propaga. De hecho, las rendijas son una manera particular de generar un patrón. Por lo que si se quisiera tener un patrón circular, rectangular, etc, todo esto se podría hacer con rendijas. Por ende, se habla de función de apertura cuando se sabe cómo luce un campo electromagnético bajo cierto plano, por ejemplo en  $x = 0$ . Por lo tanto, al observar en un plano la intensidad de una onda electromagnética que se propaga en el espacio, se ve su función de apertura. Cuando no hay ningún objeto que obstruya la onda, se le conoce como función de campo.

Después, de pasar por la rendija o observar su patrón en un plano, se puede ahondar en la pregunta de cómo seguirá evolucionando la onda y que patrón se observará en un plano diferente a una distancia determinada. Mas aún, si se tiene un sistema óptico compuesto por muchas aperturas a diferentes distancias, es normal preguntarse cómo se verá el patrón al final. Todo esto es lo que estudia la difracción y es la que responderá la pregunta sobre que sistema de aperturas generará la transformada de Fourier espacial del perfil transversal de una onda [16].

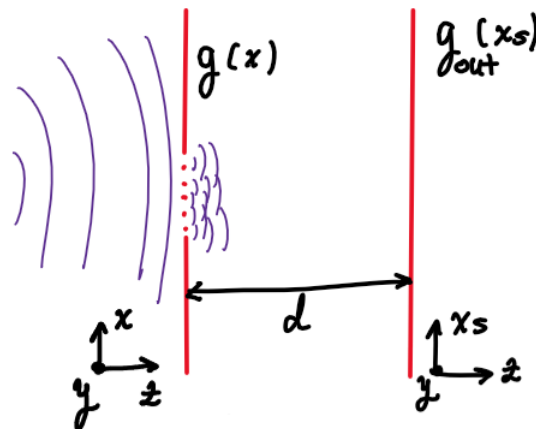


Figura 1.6: Se muestra una función de apertura  $g(x)$ , la cual deja pasar una perturbación óptica. Cada fuente puntual genera una onda esférica. A una distancia de  $d$  se observa una función de apertura  $g_{out}(x_s)$ .

En primer lugar, se tiene una una función de apertura  $g(x)$  cómo se observa en la figura (1.6). Además, después de que una perturbación óptica pase por esta, se va a componer de un grupo de fuentes puntuales infinitesimalmente pequeñas. Cada fuente

puntual emana una onda esférica que va de la forma  $\frac{e^{ikr}}{r}$  donde  $r$ , donde  $r$  es la magnitud del vector que apunta desde una fuente puntual hasta una pantalla. Por lo que en general lo que se va a observar en la pantalla ( $g_{out}(x_s)$ ), donde  $x_s$  es la coordenada espacial de la pantalla) es la suma de cada onda esférica, las cuales tienen unos pesos establecidos por la función de apertura, quedando una integral de la forma [16]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} g(x) dx. \quad (1.32)$$

Entonces, usando esto se busca entender que una de las maneras más intuitivas en pensar la propagación de ondas es no en términos de la función de apertura, sino a través de su espectro espacial  $G_{in}(k_x)$ . Por lo cual, se pretende encontrar una función de transferencia que al multiplicarse por  $G_{in}(k_x)$  pueda obtener la transformada de Fourier de la función de apertura en la pantalla  $G_{out}(k_x)$ .

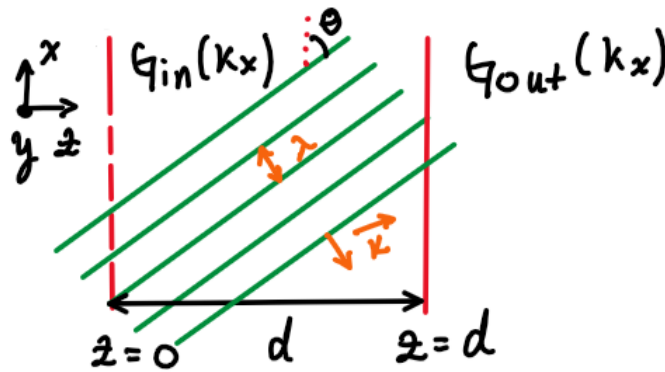


Figura 1.7: Se muestra la FT de una función de apertura  $G_{in}(K_x)$ , y se propaga una onda plana de esta función desde  $z = 0$  y  $z = d$ . La onda plana tiene longitud de onda  $\lambda$  y un vector de onda  $\mathbf{k}$ . A una distancia  $d$  se obtiene la función  $G_{out}(k_x)$ .

Para esto, tomemos como guía la imagen (1.7). Supongamos que se tiene el espectro espacial de la función de apertura. Por lo tanto, se debe encontrar cuál es el espectro en la salida, ubicado en una pantalla a una distancia  $d$ . Primero, el espectro espacial se puede pensar como un montón de ondas planas a diferentes ángulos. En este caso la onda que se propaga en la figura (1.7) presenta un ángulo  $\theta$  y tiene una longitud de onda  $\lambda$ . Por lo tanto, si se quiere encontrar cómo  $G_{in}$  se transforma a  $G_{out}$ , lo único que se debe tener en cuenta es cómo cualquier onda plana con un cierto ángulo, se propaga desde el plano inicial y el plano final, para un valor arbitrario de  $k_x$ .

La ecuación de una onda propagándose en el eje  $z$  es proporcional a  $e^{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ , la fase se toma igual a cero. Esta onda tiene un número de onda igual a  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ . Por lo cual, al hacer el producto punto la ecuación de la onda queda como  $e^{i(k_x x + k_z z)}$ , si solo tomamos en cuenta la parte espacial. Ahora, queremos saber que pasa si propagamos la onda de un plano a otro plano. Sea el plano de inicio en  $z = 0$  y el final en  $z = d$ . Por lo tanto, en  $z = 0$  la onda plana queda como  $e^{i(k_x x)}$ . Por otro lado, si se evalúa en  $z = d$  queda como  $e^{i(k_x x + k_z d)} = e^{i k_x x} e^{i k_z d}$ . Se observa que se multiplica la onda plana original por un factor de  $e^{i k_z d}$ . Este factor es la función de transferencia para la propagación de una distancia  $d$ ,  $H_d = e^{i k_z d}$ .

A pesar de haber encontrado la función de transferencia, sería útil dejar  $k_z$  en términos de la magnitud de  $k$  y de  $k_x$ . Para esto se utiliza el hecho de que

$$|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_z^2,$$

al despejar  $k_z$ :

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2},$$

donde se tomo  $|\mathbf{k}| = k$ . Al factorizar  $k$ :

$$k_z = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2}}.$$

Ahora, se utiliza lo que se conoce en óptica como la aproximación paraxial, es decir, el vector de onda  $k$  es mucho más grande que  $k_x$  o las componentes perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Por ende, si se utiliza expansión de Taylor  $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ), de lo que esta en la raíz, se obtiene:

$$k_z \approx k - \frac{k_x^2}{2k},$$

De esta manera la función de transferencia queda como [16]:

$$H_d = e^{ikd} e^{-i \frac{k_x^2 d}{2k}}.$$

El primer término es una constante que se puede obviar por el momento, y por lo tanto la función de transferencia es proporcional a:

$$H_d \propto e^{-i \frac{k_x^2 d}{2k}}. \quad (1.33)$$

De hecho, esta función de transferencia al pasarlo al espacio de posición por medio del teorema de convolución, podrá generar lo que se conoce como la difracción de Fresnel. Esta difracción dice cómo es el patrón de difracción del campo eléctrico, en una pantalla a una distancia  $d$ , no muy grande, de una apertura.

Ahora, para poder entender como es la función de transferencia de un lente, primero se va a hablar sobre la función de transferencia de materiales transparentes con índices de refracción diferentes al medio. Supongamos que el medio es aire. Por ejemplo, si se tiene una onda plana propagándose en el aire y se pone un apertura transparente de distancia  $L$ , la transmisión de su intensidad no se vera afectada. Pero si afecta la luz, debido a que le agrega cierta fase a la onda, por tener un índice de refracción  $n$ , diferente de uno. Se sabe que la función de transferencia de una onda que se propaga una distancia  $L$ , a lo largo del espacio en el eje  $z$ , es  $e^{ikL}$ . Si en vez de aire, se tiene un material de un índice de refracción  $n$  y tiene de largo una distancia  $L$ . Cuando la onda pase por el material esta tendrá una longitud de onda más pequeña. Esto debido a que de acuerdo con la ecuación que relaciona el número de onda con la velocidad de propagación:

$$k' = \frac{\omega}{v},$$



donde  $k'$  es el número de onda dentro del material,  $v$  es la velocidad de la onda en el material y  $\omega$  la frecuencia temporal. Al dejar la velocidad en términos del índice de refracción:

$$k' = \frac{\omega}{v},$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Entonces:

$$\frac{k'}{n} = k,$$

$$k' = kn. \quad (1.34)$$

Por ende, se observa en la ecuación (1.34), que el número de onda es mayor en el material, dado que  $n$  es mayor que uno. Como  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , entonces la longitud de onda es menor en el material. Por lo tanto, la función de transferencia dentro del material será  $e^{iknL}$ . Por lo tanto, se puede definir la función de apertura como la diferencia de fase entre el medio (aire) y el material.

$$g_m(x) = e^{i(knL - kL)},$$

donde  $g_m(x)$  es la función de transferencia de la onda después de pasar por el materia [16]:

$$g_m(x) = e^{i(n-1)kL}.$$

La intensidad de la función de apertura sigue siendo uno porque como se mencionó antes, este material no afecta la intensidad sino la fase. Conociendo como es la función de apertura de un material homogéneo con distancia  $L$ , se puede entonces pensar cómo sería la función de apertura de un material que tenga cierta curvatura, como la de un lente, donde su distancia varíe en función de  $x$ .

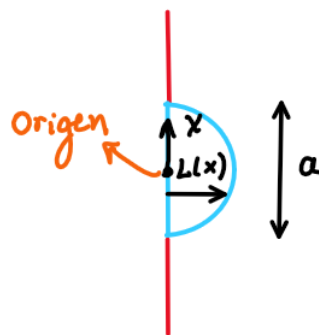


Figura 1.8: Se muestra un lente plano convexo de altura  $a$ , radio de curvatura  $R$  y un ancho que varía con el eje  $x$ ,  $L(x)$ .

Primero se va a encontrar la función de apertura de un lente plano convexo, según como se muestra en la figura (1.8). Como se puede notar en la figura (1.8), el lente tiene una altura  $a$  y un ancho que varía con la distancia en  $x$ ,  $L(x)$ . En este caso la función de apertura del lente es  $e^{i(n-1)kL(x)}$ . Si es un lente esférico, se sabe que se debe cumplir la ecuación  $x^2 + z^2 = R^2$ . Donde  $R$  es el radio de curvatura del lente. La ecuación se

puede reescribir como  $x^2 + L(x)^2 = R^2$ , debido a que la coordenada en  $z$  esta dada por la distancia  $L(x)$ . Al reemplazar  $L(x)$  se obtiene:

$$L(x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

al factorizar el radio de curvatura:

$$L(x) = R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}.$$

En óptica normalmente los lentes tienen un radio de curvatura muy grande comparado con el largo del lente. Por ende,  $x \ll R$ , y se puede hacer una expansión en serie de Taylor:

$$L(x) \approx R - \frac{x^2}{2R}.$$

Se puede notar que la distancia  $L$  sigue una ecuación de una parábola. Al poner este valor en la ecuación de la función de transferencia se obtiene [16]:

$$g_l(x) = e^{i(n-1)kR} e^{-i(n-1)\frac{kx^2}{2R}}.$$

El primer término es una fase constante, ya que, no depende de  $x$ . Por lo tanto, se va a ignorar. Ahora, en óptica geométrica, para un lente plano convexo [17]:

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R},$$

donde  $f$  es la distancia focal del lente. Por lo tanto, al reemplazar esto en la ecuación (1.3), se obtiene:

$$g_l(x) = e^{-i\frac{kx^2}{2f}}.$$

Si se ponen dos lentes plano convexos juntos, forman un lente biconvexo. Se obtendrá la misma función, debido a que lo único que cambia es que  $\frac{1}{R}$ , ahora es igual a  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ , donde  $R_1$  y  $R_2$ , son los radios de curvatura de cada lente plano convexo. Por lo que la sustitución será la misma y se obtendrá la misma función de apertura. Hay que tener en cuenta que  $f$ , ahora será la distancia focal del lente biconvexo y no de un solo lente plano convexo.

Por otro lado, si queremos hallar la función de transferencia del lente en el espacio de frecuencias, entonces se debe

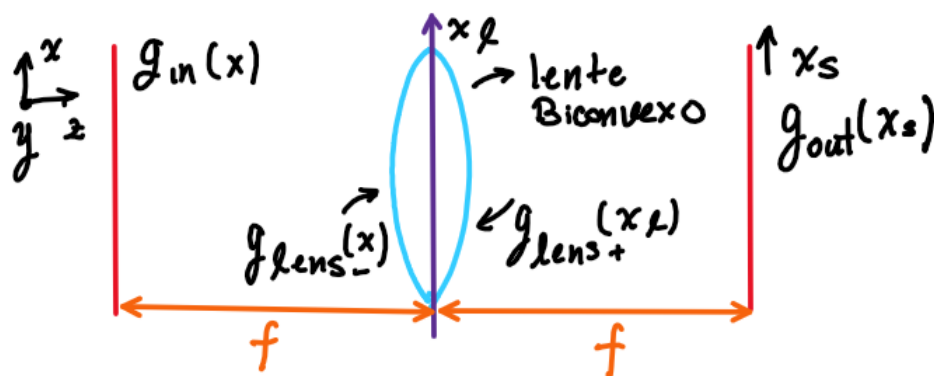


Figura 1.9: Se muestra una función de apertura  $g_{in}(x)$ , que se propaga hasta llegar a un lente biconvexo de distancia focal  $f$ . La función de apertura justo antes del lente es  $g_{lens-}(x)$ , y justo después es  $g_{lens+}(x)$ . A una distancia  $2f$  después de la función  $g_{in}(x)$ , se observa una función de apertura  $g_{out}(x_s)$ .

Teniendo claros estos conceptos presentados y la función de apertura de un lente biconvexo. Se puede describir cómo un lente puede generar la transformada de Fourier de un campo eléctrico por medio de un sistema 2f. Para la descripción del sistema 2f, se toma en cuenta la figura (1.9). En esta figura se puede notar que básicamente un sistema 2f esta compuesto por el perfil transversal de un campo eléctrico (ya sea después de pasar por una apertura o sin pasar por una), denotado por  $g_{in}(x)$ , esta a una distancia igual a la distancia focal ( $f$ ) de un lente biconvexo, y se observa el patrón formado después de otra distancia  $f$  del lente  $g_{out}(x_s)$ . El eje  $x$  en el lente se denota como  $x_l$  y en el plano de observación como  $x_s$ .

Primero, escribamos la FT de la función de apertura antes pasar por el lente, al aplicar la función de transferencia (ecuación (1.33)) de la propagación de una onda una distancia  $f$  a la FT de la función de apertura de entrada:

$$G_{lens-}(k_x) = e^{-i\frac{k_x^2 f}{2k}} G_{in}(k_x), \quad (1.35)$$

donde  $G_{lens-}(k_x)$  es la FT de la función de apertura antes pasar por el lente. Se sabe por la ecuación (1.3) que la función de transferencia justo después de pasar por el lente es:

$$g_{lens+} = e^{-i\frac{kx_l^2}{2f}} g_{lens-},$$

donde  $g_{lens-}$  es la función de apertura justo después de pasar por el lente. Ahora, para poder obtener la función de apertura de salida se utiliza la difracción de Fresnel, que en otras palabras es utilizar el teorema de convolución en la ecuación  $G_{out} = H_f G_{lens+}$ , donde  $H_f$  es la función de transferencia dado una propagación  $f$  en la dirección  $z$ :

$$\begin{aligned} g_{out}(x_s) &= g_{lens+}(x_l) * e^{i\frac{kx_s^2}{2f}}, \\ g_{out}(x_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{lens+}(x_l) e^{i\frac{k(x_s-x_l)^2}{2f}} dx_l, \\ g_{out}(x_s) &= e^{i\frac{kx_s^2}{2f}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{lens+} e^{i\frac{kx_l^2}{2f}} e^{-i\frac{kx_s x_l}{f}} dx_l. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Si el vector de onda forma un ángulo  $\theta$  con respecto al plano  $y-z$ , entonces  $k \sin(\theta) = k_x$ . Bajo la aproximación paraxial  $\sin(\theta) \approx \frac{x_s}{f}$ . Por ende,  $\frac{kx_s}{f} = k_x$ , al reemplazar esto en la ecuación (1.36), se obtiene:

$$g_{out}(x_s) = e^{i\frac{kx_s^2}{2f}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{lens+} e^{i\frac{kx_l^2}{2f}} e^{-ik_x x_l} dx_l.$$

Si se reemplaza  $g_{lens+}$  por la ecuación (1.3), se llega a:

$$\begin{aligned} g_{out}(x_s) &= e^{i\frac{kx_s^2}{2f}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{lens-} e^{-i\frac{kx_l^2}{2f}} e^{i\frac{kx_l^2}{2f}} e^{-ik_x x_l} dx_l, \\ g_{out}(x_s) &= e^{i\frac{kx_s^2}{2f}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{lens-} e^{-ik_x x_l} dx_l, \end{aligned}$$

se puede notar que la integral es precisamente la FT de la función de apertura justo antes de pasar por el lente  $G_{lens-}$ .

$$g_{out}(x_s) = e^{i\frac{kx_s^2}{2f}} G_{lens-}(k_x),$$

al reemplazar  $G_{lens-}$  por la ecuación (1.35), se obtiene:

$$g_{out}(x_s) = e^{i\frac{kx_s^2}{2f}} e^{-i\frac{kx_s^2 f}{2k}} G_{in}(k_x).$$

Al utilizar la substitución  $k_x = \frac{kx_s}{f}$  en la ecuación:

$$g_{out}(x_s) = e^{i\frac{kx_s^2}{2f}} e^{-i\frac{kx_s^2}{2f}} G_{in}(k_x),$$

obteniendo finalmente [16]:

$$g_{out}(x_s) = G_{in}(k_x),$$

es decir, la función de apertura en la pantalla es la transformada de Fourier espacial de la función de apertura de entrada. Lo cual es lo que se quería demostrar. Por ende, el sistema  $2f$  permite esta transformada de Fourier para un campo eléctrico de entrada.

# Capítulo 2

## Función de distribución de Wigner

### 2.1 WDF en análisis de señales

Una de las funciones que implementa una representación de una señal en el espacio de fase es la función de Wigner (WDF, por sus siglas en inglés). La WDF es utilizada en muchos campos, como procesamiento dual de frecuencia y tiempo, compresión de datos y procesamiento de información óptica [18].

La motivación de la WDF es que se reduce a la función de densidad espectral en todo momento  $t$  para procesos estacionarios, pero es totalmente equivalente a la función de autocorrelación no estacionaria. Esta función de densidad espectral informa cómo está distribuida la potencia o la energía de una señal sobre las distintas frecuencias de las que está conformada. Por lo tanto, la función de Wigner dice (aproximadamente) cómo cambia la densidad espectral en el tiempo [19]. Para dos variables conjugadas  $y$  y  $q_y$ , la WDF de una señal  $u(y)$  se define como [20]:

$$W_u(y, q_y) = \int_{-\infty}^{\infty} u\left(y - \frac{y'}{2}\right) \bar{u}\left(y + \frac{y'}{2}\right) e^{-iq_y y'} dy' \quad (2.1)$$

A veces se suele poner un factor de  $2\pi$  en la exponencial o el signo suele ser diferente. Sin embargo, esto no cambia el significado físico de la función, como a veces también suele pasar con la transformada de Fourier. En este capítulo no se centrará en la demostración de donde sale la función de Wigner. Esta se puede encontrar en [19].

### 2.2 WDF en Mecánica Cuántica

La WDF en el contexto de la mecánica cuántica, se introdujo con el propósito de poder representar estados cuánticos en el espacio de fase. La naturaleza cuántica de estos estados tienen en cuenta el principio de incertidumbre. Este principio implica que la representación de la distribución de probabilidad de un estado en el espacio de fase, en las variables conjugadas  $p$  y  $q$  no está bien definida porque ya que no se pueden realizar mediciones simultáneas de estas dos variables [21]. Una forma de afrontar este problema es definiendo estas funciones, como funciones de cuasiprobabilidad. Una de las funciones más conocidas de estas funciones de distribución es la WDF. Estas funciones de cuasiprobabilidad son útiles porque permiten representar propiedades cuánticas de

un estado. Para un estado puro unidimensional, su WDF en las variables  $q_y$  y  $y$  es [7]:

$$W(y, q_y) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left( y - \frac{y'}{2} \right) \bar{\psi} \left( y + \frac{y'}{2} \right) e^{-i\frac{yq_y}{h}} dy', \quad (2.2)$$

donde  $h$  es la constante de planck y  $\psi(y)$  es la función de onda del estado en la variable  $y$ . Se observa como en la ecuación (2.2) la WDF tiene una relación directa con la función de onda, y esta función de onda de hecho da cuenta de las propiedades cuánticas de un estado dada una representación.

Ahora, si se integra con respecto a  $q_y$ , se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(y, q_y) dq_y = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left( y - \frac{y'}{2} \right) \bar{\psi} \left( y + \frac{y'}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{yq_y}{h}} dq_y dy', \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left( y - \frac{y'}{2} \right) \bar{\psi} \left( y + \frac{y'}{2} \right) \delta(y') dy' = |\psi(y)|^2, \quad (2.4)$$

el cual es la densidad de probabilidad en la variable de posición  $y$ . De forma análoga, si se integra sobre  $y$ , se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(y, q_y) dy = |\phi(q_y)|^2,$$

donde  $\phi(q_y)$  es la función de onda del momento en el eje  $y$ , y está relacionado con la función de onda en posición por una transformada de Fourier. Por lo que al integrar en la variable  $y$  se obtiene la densidad de probabilidad en  $q_y$ .

Por otro lado, como otras distribuciones, la función de Wigner puede ser usada para calcular valores promedios. Sin embargo, las funciones de los operadores  $\hat{y}$  y  $q_y$  para ser promediadas deben ser Weyl-ordenadas, es decir simétricamente ordenadas en términos de estos operadores. Por ejemplo, la función clásica  $yq_y$  debe ser reemplazada por  $(\hat{y}\hat{q}_y + \hat{q}_y\hat{y})/2$ , esto debido a que en mecánica cuántica no todos los operadores conmutan entre sí. En general si  $\{G(\hat{y}, \hat{q}_y)\}_W$  es una función Weyl-ordenada, entonces [7]:

$$\langle \{G(\hat{y}, \hat{q}_y)\}_W \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \{G(\hat{y}, \hat{q}_y)\}_W W(y, q_y) dy dq_y, \quad (2.5)$$

corresponde al promedio de la función en el espacio de fase.

## 2.3 Ejemplos de WDF

A continuación, se mostrará cuál es la WDF de un estado de gato en mecánica cuántica, y se realizará un calculo explicito de la WDF de dos gaussianas separadas una distancia  $2d$ .

### 2.3.1 WDF de un estado de gato

Un estado de gato en mecánica cuántica se define como una superposición de dos estados coherentes, que tienen una fase de  $\pi/2$  entre ellas [7]:

$$|cat\rangle = N(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle),$$

Siendo  $N$  una constante de normalización. Un estado coherente se define como una superposición de estados de Fock ( $|n\rangle$ ):

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

En este caso se mostrará cómo es la WDF de un estado de gato de la forma:

$$|cat\rangle = N(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle),$$

Este estado se le suele dar el nombre de estado de gato impar [7]. El procedimiento se puede encontrar en [7]. Por lo cual, la WDF es:

$$W_{cat}(x,y) = \frac{1}{\pi(1+e^{-2\alpha^2})} \left( e^{-2(x-\alpha)^2-2y^2} + e^{-2(x+\alpha)^2-2y^2} - 2e^{-2x^2-2y^2} \cos(4y\alpha) \right).$$

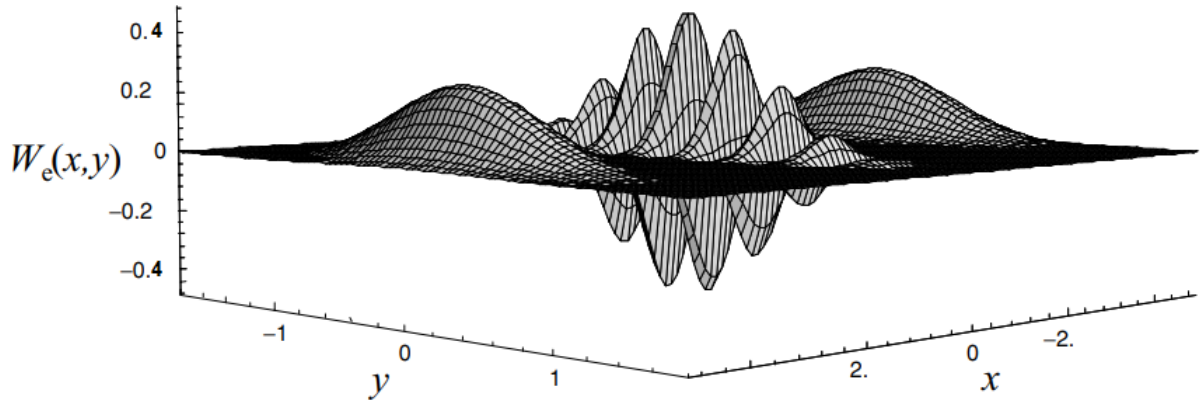


Figura 2.1: Gráfica de la función de Wigner en función de  $y$  y  $x$ , de un estado de gato impar. Tomado de [7].

### 2.3.2 WDF de dos gaussianas separadas una distancia $2d$

Se va a utilizar la misma función de la ecuación (1.29). Calculando por a parte:

$$u(x-y'/2) = N(e^{-a(y-y'/2-d)^2} + e^{-a(y-y'/2+d)^2}), \quad (2.6)$$

$$u^*(y+y'/2) = N(e^{-a(y+y'/2-d)^2} + e^{-a(y+y'/2+d)^2}). \quad (2.7)$$

Al multiplicar (2.6) con (2.7):

$$u(x-y'/2)u^*(y+y'/2) = N^2(e^{-a[(y-y'/2-d)^2+(y+y'/2-d)^2]} + e^{-a[(y-y'/2+d)^2+(y+y'/2-d)^2]} + e^{-a[(y-y'/2-d)^2+(y+y'/2+d)^2]} + e^{-a[(y-y'/2+d)^2+(y+y'/2+d)^2]}).$$

La función de Wigner esta dada por la ecuación (2.1):

$$W_u(y, q_y) = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-a[(y-y'/2-d)^2+(y+y'/2-d)^2]} + e^{-a[(y-y'/2+d)^2+(y+y'/2-d)^2]} + e^{-a[(y-y'/2-d)^2+(y+y'/2+d)^2]} + e^{-a[(y-y'/2+d)^2+(y+y'/2+d)^2]}).$$

$$+e^{-a[(y-y'/2-d)^2+(y+y'/2+d)^2]} + e^{-a[(y-y'/2+d)^2+(y+y'/2+d)^2]} e^{-iq_y y'} dy'.$$

La integral se divide en la suma de cuatro integrales. Al desarrollar el exponente de la primera integral:

$$\begin{aligned} ((y-y'/2)-d)^2 + ((y+y'/2)-d)^2 &= 2y^2 + y'^2/2 - 4yd + 2d^2, \\ 2y^2 + y'^2/2 - 4yd + 2d^2 &= 2(y-d)^2 + y'^2/2. \end{aligned}$$

Ahora, el exponente de la segunda integral:

$$((y-y'/2)+d)^2 + ((y+y'/2)-d)^2 = 2y^2 + y'^2/2 - 2y'd + 2d^2.$$

El exponente de la tercera integral:

$$((y-y'/2)-d)^2 + ((y+y'/2)+d)^2 = 2y^2 + y'^2/2 + 2y'd + 2d^2.$$

Por último, el exponente de la cuarta integral:

$$\begin{aligned} ((y-y'/2)+d)^2 + ((y+y'/2)+d)^2 &= 2y^2 + y'^2/2 + 4yd + 2d^2, \\ 2y^2 + y'^2/2 + 4yd + 2d^2 &= 2(y+d)^2 + y'^2/2. \end{aligned}$$

Las integrales se calcularán con la formula de la ecuación (1.31). Primero se calculará la primera integral, utilizando el resultado de (1.31):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a(y-d)^2} e^{-ay'/2-iq_y y'} dy' = e^{-2a(x-d)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-q_y^2/2a}.$$

La segunda integral es:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ay^2-2d^2a} e^{2y'da-iq_y y'-y'^2a/2} dy' &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-2ay^2-2d^2a} e^{(2da-iq_y)^2/2a}, \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-2ay^2-2d^2a} e^{2d^2a} e^{-2diq_y} e^{-q_y^2/2a}. \end{aligned}$$

Utilizando la identidad de Euler. Se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ay^2-2d^2a} e^{2y'da-iq_y y'-y'^2a/2} dy' = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-2ay^2} (\cos(2dq_y) - i \sin(2dq_y)).$$

La tercera integral es:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ay^2-2d^2a} e^{-2y'da-iq_y y'-y'^2a/2} dy' &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-2ay^2-2d^2a} e^{(-2da-iq_y)^2/2a}, \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-2ay^2-2d^2a} e^{2d^2a} e^{-2diq_y} e^{-q_y^2/2a}, \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ay^2-2d^2a} e^{-2y'da-iq_y y'-y'^2a/2} dy' \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-2ay^2} (\cos(2dq_y) + i \sin(2dq_y)),$$



La cuarta integral es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a(y+d)^2} e^{-ay'/2-iq_y y'} dy' = e^{-2a(x+d)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-q_y^2/2a}.$$

Al sumar las cuatro integrales, y factorizar términos, se obtiene la función de Wigner de dos gaussianas separadas una distancia  $2d$ :

$$W_u(y, q_y) = N^2 \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-q_y^2/2a} [e^{-2a(y-d)^2} + e^{-2a(y+d)^2} + 2e^{-2ay^2} \cos(2dq_y)].$$

Si se toma  $\sigma_y = 0,3525\text{mm}$ ,  $d = 3,5\text{mm}$  y  $N = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ , se obtiene la siguiente gráfica:

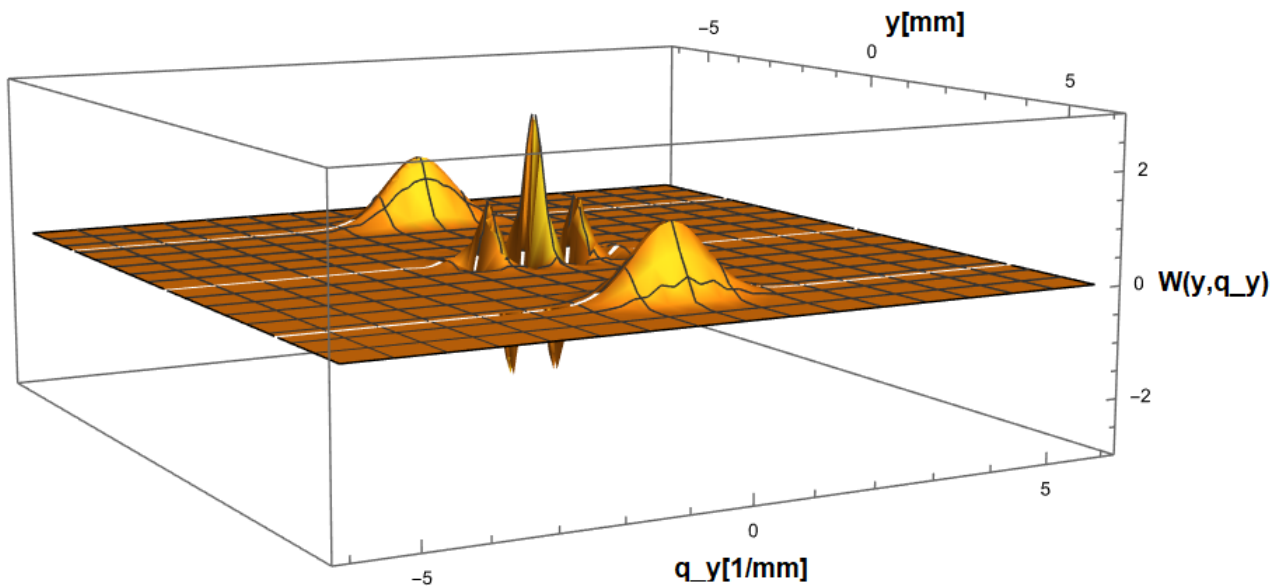


Figura 2.2: Gráfica de la función de Wigner en función de  $y$  y  $q_y$ , de dos gaussianas separadas una distancia de  $7\text{mm}$ . Cada gaussiana tiene una incertidumbre de  $0,3525\text{mm}$ .

Se puede observar que la figura (2.2) es muy parecida a la WDF de un estado de gato impar, dada por la figura (2.1).



# Capítulo 3

## Relación entre la WDF y la FFT

Para poder entender la relación de las dos funciones que se han descrito en los dos capítulos anteriores, la WDF y la FFT, se va a introducir una nueva transformada integral, la cual es la transformada de Radon.

### 3.1 La transformada de Radon

La transformada de Radon fue introducida en 1917 por Johan Radon [22]. Posteriormente fue utilizada en el diagnóstico médico mediante tomografía digital de rayos-x. Mediante esta transformación es posible crear una imagen 3D a partir de los datos de proyección asociados con escaneos transversales de un objeto [23].

La idea clave de Radon fue que cualquier función integrable  $f(x, y)$  puede representarse de manera única mediante todas las integrales de línea recta sobre su dominio y, por lo tanto, recuperarse de ellas. Por lo tanto, la proyección de la función sobre una de estas líneas es [12]:

$$p(l) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(l), y(l)) dl, \quad (3.1)$$

donde  $l$  representa la línea sobre la cual se está integrando. La ecuación (3.1) se puede formular, a partir de coordenadas polares [12]:

$$p(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - s) dx dy,$$

siendo  $\theta$  el ángulo entre el vector normal de las líneas y el eje  $x$  y  $s$  la distancia ortogonal entre la línea y el origen. La figura (3.1) muestra lo que representa  $s$  y el ángulo  $\theta$  en el plano  $x$ - $y$ . La delta garantiza que la integración se realice a lo largo de la línea respectiva.

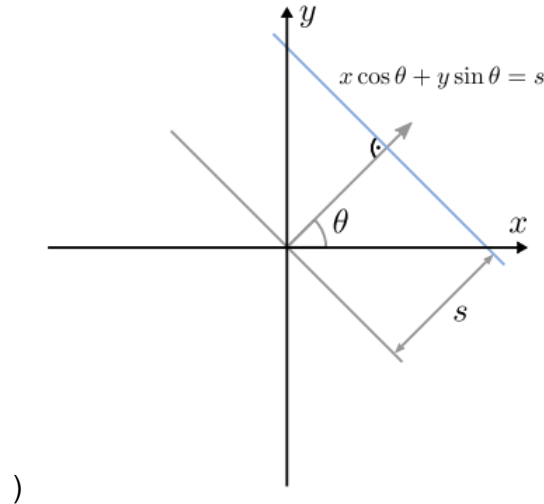


Figura 3.1: La recta azul en el plano  $x$ - $y$ , está descrita por la distancia  $S$ , y el ángulo  $\theta$ . Esta representación da lugar a la ecuación de una línea, a la cual se va a proyectar una función de dos variables  $f(x,y)$ . Tomado de [12].

Para un ángulo fijo  $\theta$  la función unidimensional  $p_\theta(s)$  o  $p(\theta, s)$ , es llamada la proyección. Convertir los valores de la función  $f(x, y)$  en valores integrales de línea  $p(\theta, s)$  se conoce como la transformada de Radon ( $R_\theta[f(x, y)]$ ) en 2-D, y su núcleo es la delta de Dirac mostrada en la ecuación (3.1). El objetivo de la reconstrucción de la tomografía computacional (CT, por sus siglas en inglés), es el cálculo de los valores de la función original a partir de los valores integrales de la línea de medida. Esto se hace a través de la transformada inversa de Radon.

El 'Fourier slice theorem', dice que si se tiene la FT de una función  $G(u, v) = F\{f(x, y)\}$  y de la proyección  $P(\xi, \theta) = F\{p_\theta(s)\}$ , entonces se cumple que [12]:

$$P(\xi, \theta) = G(\xi \cos(\theta), \xi \sin(\theta)). \quad (3.2)$$

Este teorema es usado para encontrar una función  $f(x, y)$ , a partir de la convolución de  $h(s)$  y  $p(\theta, s)$ :

$$f(x, y) = \int_0^\pi (p(\theta, s) * h(s))|_{s=x \cos(\theta) + y \sin(\theta)} d\theta,$$

donde  $h(s)$  viene dado por:

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| e^{2\pi i \xi s} d\xi,$$

y puede interpretarse como el núcleo de una transformación integral.

## 3.2 La WDF y la transformada de Radon

La distribución marginal para  $y$  y  $q_y$  después de una fase  $\theta$  en el espacio de fase en mecánica cuántica, puede definirse como [6]:

$$pr(y, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} W(y \cos(\theta) - q_y \sin(\theta), q_y \cos(\theta) + y \sin(\theta)) dq_y. \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3), tiene la forma de una transformada de Radon. La función de Wigner se puede encontrar usando la transformada inversa de Radon. Por el 'Fourier-slice theorem' de la ecuación (3.2), la función de Wigner se puede escribir como [6]:

$$W(y, q_y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} R_\theta[W(y, q_y)] h(y \cos(\theta) + q_y \sin(\theta) - s) ds d\theta,$$

con la función  $h(s)$  [6]:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| e^{i\xi s} d\xi.$$

Por otro lado, es importante notar que si  $\theta = 0$  en la ecuación (3.3), entonces, se obtiene:

$$p(y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(y, q_y) dq_y,$$

y por la ecuación (2.3), esto es igual al modulo cuadrado de la función  $u(y)$  sobre la cual esta actuando la función de Wigner, esto implica:

$$R_0[W_u(y, q_y)] = |u(y)|^2.$$

Por lo cual, la proyección de la WDF en el eje  $y$ , y vive en el dominio de la función original, y en el contexto de la mecánica cuántica se interpreta como la distribución marginal en el eje  $y$ . Ahora, si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$p\left(y, \frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} W(-q_y, y) dq_y,$$

esto es lo mismo que haber rotado la función de Wigner, un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$  [18], e integrar sobre la coordenada  $y$ . Esto implica que:

$$R_{\frac{\pi}{2}}[W_u(y, q_y)] = |F\{u(y)\}|^2. \quad (3.4)$$

Se observa que la transformada de Radon a un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$  es igual a la transformada de Fourier de la función  $u(y)$ , y por ende, por la ecuación (2.4), se interpreta como la distribución marginal en  $q_y$  en mecánica cuántica. Por lo tanto, la proyección de la WDF sobre el eje  $q_y$ , vive en el dominio de la transformada de Fourier de la señal.

En el capítulo uno, se menciona, que el dominio de la FFT, de orden  $a$ , esta sobre el eje que forma un ángulo  $\theta = \frac{a\pi}{2}$ . Por lo cual, es natural pensar que, ese ángulo es igual al ángulo con el que se proyecta la WDF, y por ende si se quisiera generalizar la proyección de la WDF sobre algún ángulo  $\theta$ , entonces [11]:

$$R_\theta[W_u(y, q_y)] = |F^a\{u(y)\}|^2. \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5), es la relación entre la función de Wigner y la transformada de Fourier fraccional.



# Capítulo 4

## Conclusiones y Perspectivas

A lo largo de este proyecto, se define que es una transformada de Fourier fraccional y cómo surge en el ámbito de las transformaciones integrales. Se deriva la ecuación de valores propios de la FFT, y se demuestra desde una perspectiva geométrica cuál es el núcleo de dicha transformación. Posteriormente, se encuentra la FFT de una señal dada por dos gaussianas separadas una distancia arbitraria. Para el caso específico de una distancia de  $7mm$ , e incertidumbre de  $0,3525mm$ , se realizan gráficas a diferentes órdenes de la FFT espacial de esta señal. Seguidamente, se demuestra desde la perspectiva de la óptica difractiva, que el sistema  $2f$  genera la transformada de Fourier espacial de una señal óptica. Por otro lado, se define la WDF desde una perspectiva clásica y cuántica. Asimismo, se halla la función de Wigner de dos gaussianas separadas una cierta distancia, y se grafica para el caso de separación de  $7mm$ , e incertidumbre  $0,3523mm$ . A partir de esta gráfica, se puede notar que es muy parecida a la de un estado de gato impar, en el contexto de mecánica cuántica.

Por último, con la definición de la transformada de Radon y su implementación en la WDF, se responden una de las preguntas problema, la cual era preguntarse si hay alguna relación entre la WDF y la FFT. Sin embargo, por falta de tiempo no se pudo describir teóricamente la implementación óptica de la FFT, ya que, estaba planteado como uno de los objetivos y una de las preguntas problema. Pero, este cálculo se retomará para la monografía de pregrado. Además, en dicha monografía se espera implementar un montaje óptico que puede reconstruir la función de Wigner de un estado de gato a partir de dos haces gaussianos separados una cierta distancia. Por lo cual, este trabajo ha sido una base teórica para poder hacer simulaciones de propiedades cuánticas, a partir de estados de luz clásicos.





# Bibliografía

- [1] A. Furusawa. *Quantum states of light*. Springer, (2015).
- [2] M. Tse y N. Kijbunchoo. *Quantum-Enhanced Advanced LIGO Detectors in the Era of Gravitational-Wave Astronomy*. Phys. Rev. **123**, (23): 231107, (2019).
- [3] G. Milburn P. Cochrane y W. Munro. *Macroscopically distinct quantum-superposition states as a bosonic code for amplitude damping*. Phys.Rev. A **59**, 2631, (1999).
- [4] E. Wigner. *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*. Phys. Rev. **40**, 749, (1932).
- [5] A. Martinez. *Characterization of quantum states of light by means of homodyne detection and reconstruction of Wigner functions*. Monografía de pregrado: Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia, (2020).
- [6] U. Leonhardt. *Measuring the quantum state of light*. Cambridge University Press, (1997).
- [7] C. Gerry y P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, (2004).
- [8] M. Fox. *Quantum Optics an introduction*. Oxford University Press Inc, (2006).
- [9] E. Condón. *Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transformations*. Proc. Natl. Acad. Sci. **23**, (3): 158-164, (1937).
- [10] V. Namias. *The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics*. IMA Journal of Applied Mathematics **25**, (3): 241-265, (1980).
- [11] H. Ozaktas y M. Kutay. *The Fractional Fourier Transform*. European Control Conference, (2001).
- [12] V. Christlein A. Maier S. Steidl y J. Hornegger. *Medical Imaging Systems*. Springer International Publishing, (2018).
- [13] G. Arfken y H. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 4ta edición, (1995).
- [14] A. Ferrero. *Matemáticas Especiales para Ingenieros*. Editorial de la Universidad Católica de Colombia, (2020).
- [15] I. Hoover. *Introducing the Fractional Fourier Transform*. (2013).
- [16] J. Goodman. *Introduction to Fourier optics*. The McGraw-Hill Companies. Second edition, (1996).
- [17] R. Guenther. *Modern Optics*. Duke University, (1990).

- [18] D. Mendlovic A. Lohmann y Z. Zalevsky. *Fractional transformations in Optics*. Elsevier science B.V., (1998).
- [19] J. Ville. *Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique*. Cables et Transmission, **2**, 61-74, (1948).
- [20] L. Cohen. *Time-frequency distributions-a review*. Proceedings of the IEEE **77**, 941, (1989).
- [21] M. Scully M. Hilley E. O’Cornell y E. Wigner. *Distributions functions in physics: fundamentals*. Physics Reports **106**, 121-167, (1984).
- [22] J. Radon. *Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannfgaltigkeiten*. (1983).
- [23] J. Radon y P. Parks. *On the determination of functions from their integral values along certain manifolds*. IEEE transactions on Medical Imaging, **5** (4): 170-176, (1986).